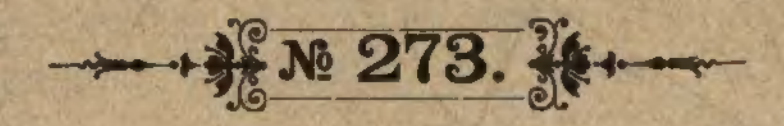
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



РАДУГА.

Д. Гика.

Радуга.

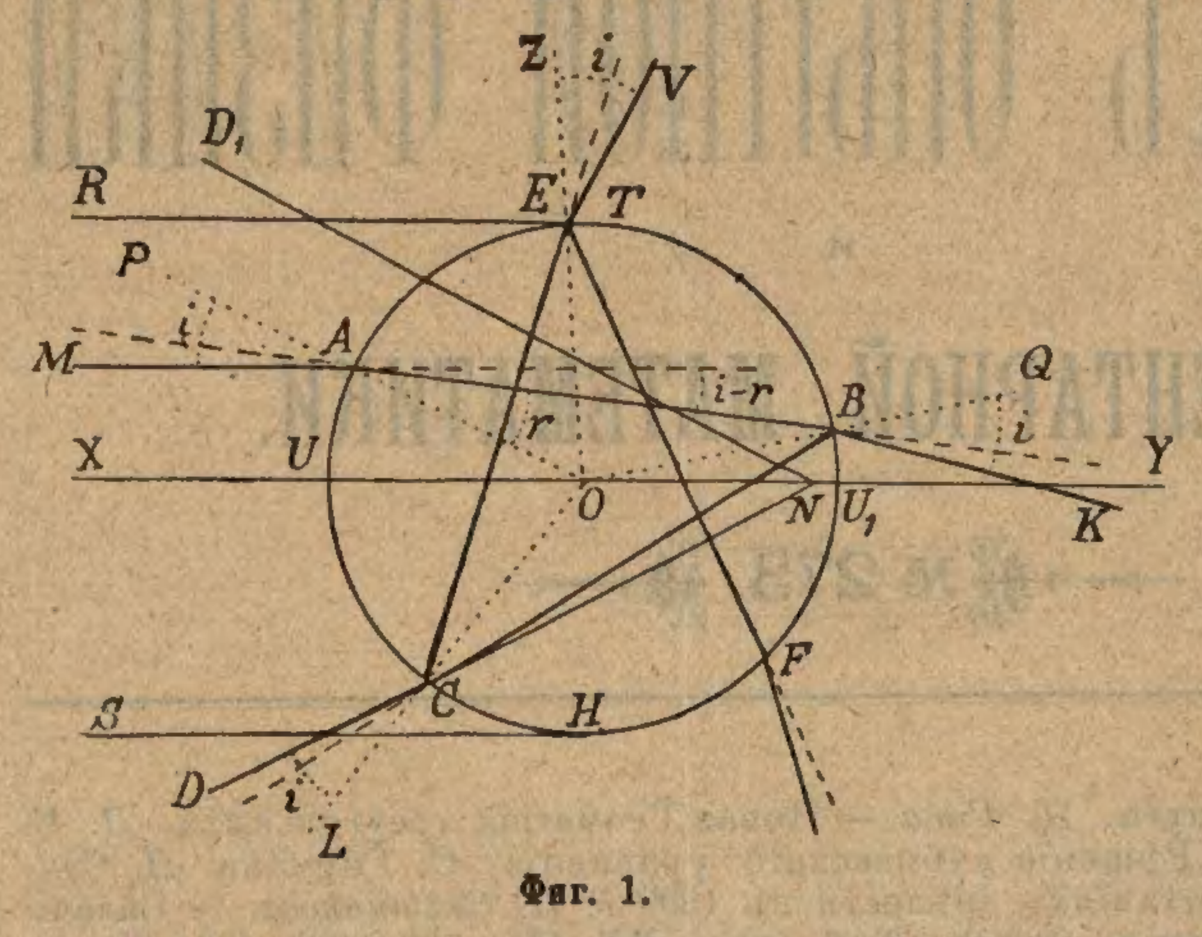
(Элементарная теорія).

§ 1. Предположимъ, что цилиндръ параллельныхъ свѣтовыхъ лучей RFHS (черт. 1) падаетъ на сферическую водяную каплю радіуса R, и пусть эти лучи однородные (одного цвѣта), имѣющіе показателя преломленія n. Разсмотримъ одинъ изъ этихъ лучей MA, падающій на внѣшнюю поверхность капли подъ нѣкоторымъ угломъ $MAP = i$. Входя въ каплю, этотъ лучъ остается въ плоскости паденія, преломляется подъ угломъ $BAO = r$ и принимаетъ внутри капли направленіе AB, уклоняющееся отъ начальнаго направленія MA на уголъ $i - r$. При этомъ имѣемъ уравненіе:

$$\mathrm{Sn}\,i = n\,\mathrm{Sn}\,r. \qquad (1).$$

Лучъ AB, встрѣчая внутреннюю поверхность капли въ точкѣ B, частію отражается отъ этой поверхности подъ угломъ r, равнымъ углу паденія, и принимаетъ направленіе BC, образуя $\angle ABC = 2r$, а частію опять преломляется и выходитъ изъ капли подъ угломъ $KBQ = i$ къ

нормали въ точкѣ B. Лучъ BC, встрѣчая внутреннюю поверхность капли въ точкѣ C, частію отражается отъ этой поверхности по направленію CE, образуя $\angle BCE = 2r$, а частію послѣ одного отраженія и 2-хъ преломленій выходитъ изъ капли по направленію CD, образуя $\angle DCL = i$ съ нормалью въ точкѣ C. Лучъ CE опять частію отражается отъ внутренней поверхности капли по направленію EF, а частію послѣ двухъ отраженій и двухъ преломленій выходитъ изъ капли по направленію EV, образуя $\angle VEZ = i$ съ нормалью въ точкѣ E и т. д. Наконецъ послѣ m отраженій лучъ опять частію отражается, а частію выходитъ изъ капли. Внутри капли лучъ идетъ по направленію ABCEF.....



Фиг. 1.

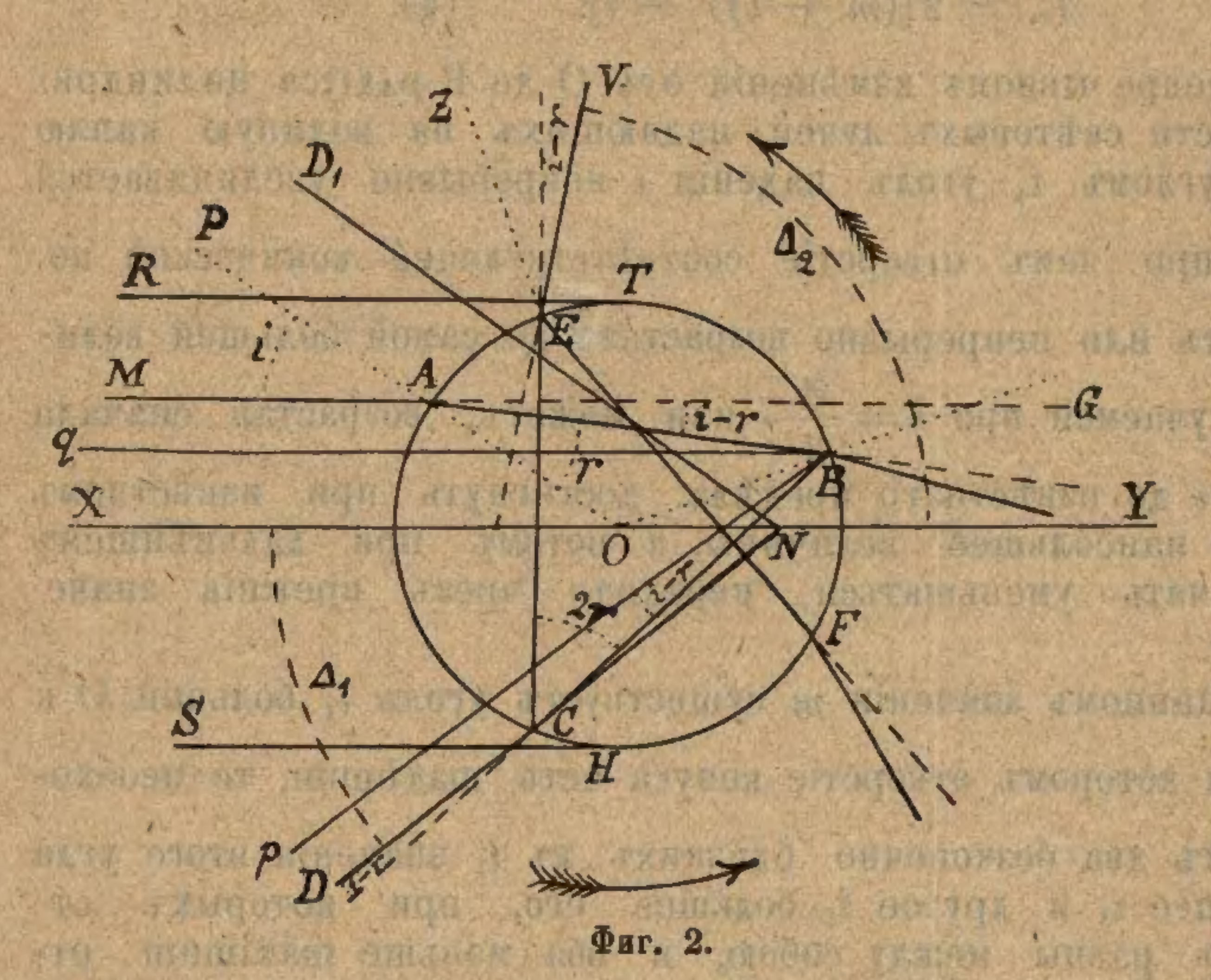
§ 2. Всѣ свѣтовые лучи, лежащіе на одной цилиндрической поверхности съ лучемъ MA ось которой XY, и падающіе на каплю подъ тѣмъ же угломъ i, послѣ m отраженій отъ внутренней поверхности капли и двухъ преломленій преобразовываются въ нѣкоторую коническую поверхность, (подобную DND_1 для $m = 1$). Съ измѣненіемъ $\angle i$, уголъ выходящаго изъ капли луча тоже мѣняется, т. е. всѣ цилиндрическія поверхности падающихъ на каплю лучей преобразовываются въ коническія поверхности разныхъ размѣровъ. Вершина каждой изъ коническихъ поверхностей лежитъ на нѣкоторомъ разстояніи, напр. ON, отъ центра O капли. Изъ $\triangle ONC$, образуемаго выходящимъ изъ капли лучемъ, радіусомъ капли въ точку выхода и центральной линій XY, имѣемъ: $ON : OC = Sn\,OCN : Sn ONC$, откуда $ON = \frac{R.Sn i}{Sn ONC}$. Послѣдняя формула показываетъ, что измѣненіемъ i, вершина конической поверхности измѣняетъ свое положеніе на линіи XY, но, по малости радіуса R, можно принять, что вершины всѣхъ такихъ коническихъ поверхностей находятся въ центрѣ O капли. Такимъ образомъ весь цилиндръ падающихъ лучей обращается въ конусъ, наполненный вообще расходящимися лучами съ вершиной въ центрѣ O капли.

§ 3. Лучъ центральный XY входитъ въ каплю въ точкѣ U подъ угломъ $i = 0$ и, встрѣчая внутреннюю заднюю поверхность капли въ точкѣ U_1, частію выходитъ изъ капли, а частію, отразившись, направляется въ противоположную сторону, приходитъ въ точку U, въ которой опять частію отражается назадъ, а частію выходитъ послѣ одного

отраженія по направленію UX на встрѣчу источника свѣта. Отразившійся отъ U лучъ выходитъ въ точкѣ U_1 послѣ двухъ отраженій изъ капли по направленію U_1У падающаго свѣта, — а частію отражается назадъ.

Отсюда видно, что центральный лучъ при m нечетномъ, т. е. послѣ нечетнаго числа отраженій отъ внутренней поверхности капли, выходитъ изъ нея по направленію противоположному своему начальному паденію, и отверстіе свѣтового конуса съ осью OX обращено въ сторону источника свѣта; а при m четномъ — центральный лучъ продолжаетъ идти по направленію своего начальнаго паденія, и отверстіе свѣтового конуса съ осью OУ обращено въ сторону противоположную источнику свѣта.

§ 4. Означимъ чрезъ Δ_1 уголъ луча CD (черт. 2), выходящаго изъ капли послѣ одного отраженія, съ осью OX; чрезъ Δ_2 — уголъ луча EV, выходящаго изъ капли послѣ двухъ отраженій, съ осью OУ и т. д.; вообще означимъ чрезъ Δ_m уголъ луча, выходящаго изъ капли послѣ m отраженій, съ осью OX, въ случаѣ m нечетнаго и съ осью OУ — въ случаѣ m четнаго, и условимся считать эти углы въ сторону, (указанную на чертежѣ стрѣлкой) противоположную ходу луча ABCEF... внутри капли.—Изъ чертежа легко видѣть, что въ рядѣ количествъ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots\ldots \Delta_m$ каждое послѣдующее больше предшествующаго ему на $2r$. Въ самомъ дѣлѣ лучъ CD, выходящій изъ капли послѣ одного отраженія, составляетъ $\angle \Delta_1$ съ осью OX; лучъ EV, выходящій изъ капли послѣ двухъ отраженій, больше $\angle \Delta_1$ на уголъ $\pi + 2r$, п. ч. если повернемъ черт. около центра O въ сторону, показанную стрѣлкой на уголъ $\pi + 2r$, лучъ CD придетъ въ совпаденіе съ EV. Слѣдовательно EV составляетъ съ осью OX уголъ $\Delta_1 + \pi + 2r$, и т. к. Δ_2 есть уголъ EV съ осью OУ, то нужно изъ предыдущаго угла вычесть π для полученія Δ_2. т. е. $\Delta_2 = \Delta_1 + 2r$. Такимъ же образомъ докажемъ, что $\Delta_3 = \Delta_2 + 2r$ и т. д.



Фиг. 2.

Вообще $\Delta_m = \Delta_{m-1} + 2r.$ (2)

Давая m различныя значенія въ послѣднемъ уравненіи, начиная съ 2 и кончая m включительно, потомъ складывая между собою полученныя уравненія и сокращая, получимъ:

$$\Delta_m = \Delta_1 + 2r(m-1) \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Для опредѣленія Δ_1 угла съ осью OX луча CD, выходящаго изъ капли послѣ одного отраженія, проведемъ изъ точки B, въ которой свѣтъ отразился, двѣ прямыя $Bp \| CD$ и $Bq \|$ входящему лучу MA, увидимъ изъ чертежа, что

$$\angle pBq = \Delta_1 = ABC - BAG - BCN$$

или

$$\Delta_1 = 2r - 2(i-r) = 2(2r-i).$$

Вставляя эту величину Δ_1 въ (3), получимъ:

$$\Delta_m = 2[(m+1)r - i]. \qquad (4).$$

§ 5. При непрерывномъ измѣненіи отъ O до R радіуса цилиндрической поверхности свѣтовыхъ лучей, падающихъ на водяную каплю подъ тѣмъ же угломъ i, уголъ паденія i непрерывно увеличивается отъ O до $\frac{\pi}{2}$, при чемъ отверстіе соотвѣтствующей конической поверхности можетъ или непрерывно возрастать до самой большей величины своей, получаемой при $i = \frac{\pi}{2}$, или можетъ, возрастая сначала при увеличеніи i до извѣстнаго предѣла, достигнуть при извѣстномъ значеніи $i = i_1$ наибольшей величины, а потомъ при дальнѣйшемъ возрастаніи i начать уменьшаться, переходя чрезъ прежнія значенія свои.

Если при данномъ значеніи m существуетъ уголъ i_1 большій O и меньшій $\frac{\pi}{2}$, при которомъ отверстіе конуса есть maximum, то необходимо существуютъ два безконечно близкихъ къ i_1 значенія этого угла — одно i_2 меньшее i_1 и другое i_3 большее его, при которыхъ отверстія конусовъ равны между собою, и оба меньше maximum отверстія, соотвѣтствующаго углу i_1. При такихъ двухъ углахъ паденія i_2 и i_3 образующія коническихъ поверхностей параллельны между собою. Означивъ чрезъ r_2 и r_3 углы преломленія, соотвѣтствующіе угламъ паденія i_2 и i_3 изъ уравненія (4) § 4 будемъ имѣть:

$$(m+1)r_2 - i_2 = (m+1)r_3 - i_3$$

или

$$i_2 - i_3 = (m+1)(r_2 - r_3). \qquad (5)$$

Но изъ уравненія (1) § 1 имѣемъ:

$$\mathrm{Sn}\, i_2 - \mathrm{Sn}\, i_3 = n(\mathrm{Sn}\, r_2 - \mathrm{Sn}\, r_3)$$

или

$$\mathrm{Sn}\left(\frac{i_2 - i_3}{2}\right)\mathrm{Cs}\left(\frac{i_2 + i_3}{2}\right) = n\,\mathrm{Sn}\left(\frac{r_2 - r_3}{2}\right)\mathrm{Cs}\left(\frac{r_2 + r_3}{2}\right). \qquad (6)$$

Раздѣляя (6) на (5), получимъ:

$$\frac{\operatorname{Sn}\frac{i_2-i_3}{2}}{\frac{i_2-i_3}{2}}\operatorname{Cs}.\frac{i_2+i_3}{2}=\frac{n}{m+1}\frac{\operatorname{Sn}\frac{r_2-r_3}{2}}{\frac{r_2-r_3}{2}}\operatorname{Cs}\frac{r_2+r_3}{2}.$$

Переходя къ предѣлу, т. е. полагая $i_3=i_2=i_1$ а слѣдовательно и $r_3=r_2=r_1$, будемъ имѣть:

$$\operatorname{Cs} i_1=\frac{n}{m+1}\operatorname{Cs} r_1.$$

Исключая r_1 изъ послѣдняго уравненія и уравн. $\operatorname{Sn} i_1=n\operatorname{Sn} r_1$, находимъ:

$$\operatorname{Sn}^2 i_1=n^2\operatorname{Sn}^2 r_1=n^2-n^2\operatorname{Cs}^2 r_1=n^2-(m+1)^2\operatorname{Cs}^2 i_1$$

или

$$1-\operatorname{Cs}^2 i_1=n^2-(m+1)^2\operatorname{Cs}^2 i_1;$$

откуда

$$\operatorname{Cs} i_1=\sqrt{\frac{n^2-1}{m^2+2m}} \qquad (7).$$

Анализъ безконечно малыхъ даетъ этотъ результатъ такъ: Приравнявъ нулю первую производную урав-нія 4 § 4 имѣемъ:

$$d\Delta_m=2(m+1)\,dr_1-2di_1=0;\; di_1=(m+1)\,dr_1.$$

Изъ ур-нія 1 § 1 получимъ:

$$\operatorname{Cs} i_1\,di_1=n\operatorname{Cs} r_1\,dr_1,$$

откуда:

$$(m+1)^2\operatorname{Cs}^2 i_1=n^2\operatorname{Cs}^2 r_1=n^2\left(1-\frac{\operatorname{Sn}^2 i_1}{n^2}\right)=n^2-1-\operatorname{Cs}^2 i_1;$$

слѣдовательно

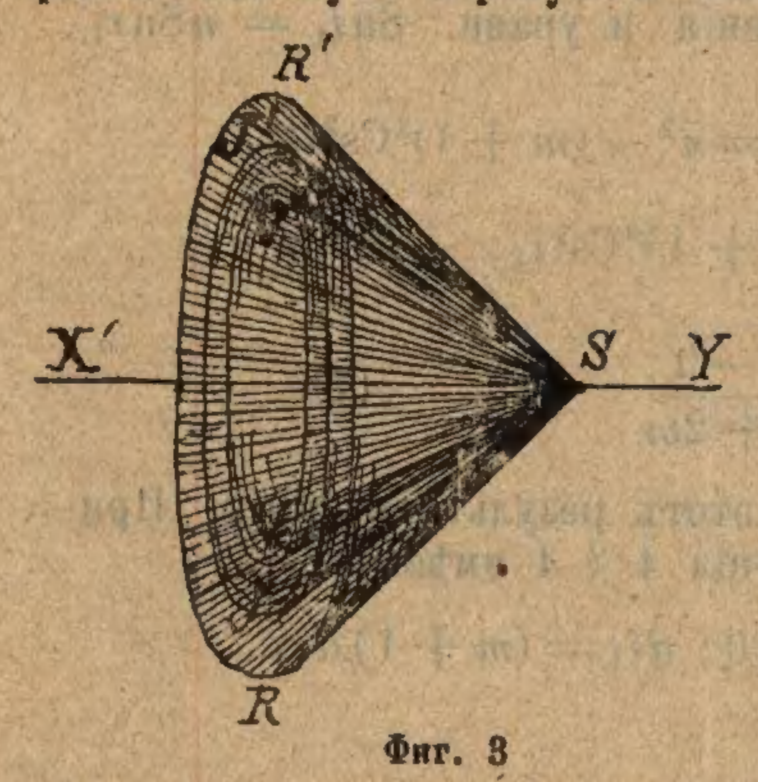
$$\operatorname{Cs} i_1=\sqrt{\frac{n^2-1}{m^2+2m}}. \qquad (7)$$

Уголъ i_1 дѣйствителенъ, если n больше 1 и меньше $m+1$, т. е. меньше 2 для одного внутренняго отраженія, меньше 3 для двухъ отраженій и пр. Слѣдовательно для воды существуетъ $\angle i_1$, при которомъ уголъ Δ_m есть maximum. Для всякаго даннаго m весь цилиндръ падающихъ на капли лучей преобразовывается въ конусъ, наполненный лучами; отверстіе этого конуса Δ_m вычисляется по формулѣ (4) § 4, замѣщая въ ней уголъ i величиной его, опредѣленной изъ уравненія (7), при чемъ соотвѣтствующее i_1 значеніе $r=r_1$ вычислится по формулѣ (1) § 1 Съ измѣненіемъ показателя преломленія n, эта величина Δ_m мѣняется и различна для лучей разныхъ цвѣтовъ. Показатель преломленія n краснаго цвѣта $=\frac{108}{81}$, а фіолетоваго $\frac{109}{81}$, и

вычисленія дадутъ слѣдующія величины наибольшихъ угловъ отклоненій для разныхъ значеній m:

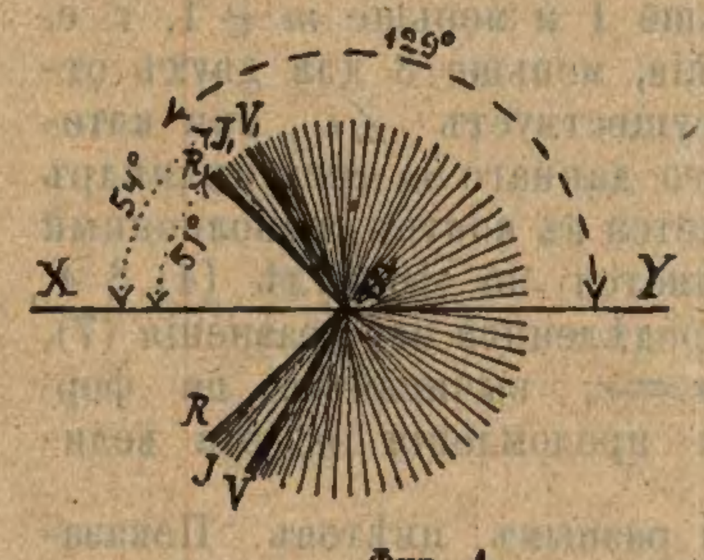
	Наибольш. уг. отклон. для красн. цвѣта.	Наибольш. уг. отклон для фіолет. цвѣта.
$m = 1$	$41^0 1' 38''$	$40^0 16' 10''$
$m = 2$	$129^0 0' 48''$	$125^0 50' 40''$
$m = 3$	$221^0 36' 52''$	$217^0 8' 38''$
$m = 4$	$316^0 7' 52''$	$310^0 25' 10''$
$m = 5$	$411^0 34' 46''$	$404^0 39' 22''$.

§ 6. Въ случаѣ одного внутренняго отраженія, т. е. при $m = 1$ фіолетовые лучи образуютъ полный конусъ VSV_1 (черт. 3), отверстіе котораго равно $40^0 16' 10''$. Такъ какъ функція мало мѣняется вблизи своего maximuma, то лучи свѣта близъ поверхности конуса почти параллельны, т. е. Δ_1 почти что сохраняетъ ту же величину maximum при углахъ паденія, близкихъ къ i_1. Число лучей на поверхности конуса больше чѣмъ по всѣмъ другимъ направленіямъ, а потому яркость свѣта на этой поверхности тоже больше чѣмъ внутри конуса. Предѣльные конусы другихъ цвѣтовъ увеличиваются отъ VSV_1 до $RSR_1 = 42^0 1' 38''$, и на каждой изъ этихъ поверхностей соотвѣтствующій цвѣтъ какъ наибольшій преобладаетъ надъ всѣми другими цвѣтами и называется явнымъ. Внутри конуса VSV_1 всѣ цвѣта находятся въ равномъ количествѣ и воспроизводятъ бѣлый цвѣтъ; на поверхности VSV_1 есть избытокъ фіолетоваго цвѣта, смѣшаннаго съ бѣлымъ; на поверхности YSY_1 есть избытокъ желтаго цвѣта со смѣсью оранжеваго и краснаго, и безъ примѣси фіолетоваго, голубого и зеленаго; наконецъ на поверхности RSR_1 находится только чистый красный цвѣтъ, а внѣ этой поверхности нѣтъ больше свѣта.



Фиг. 3

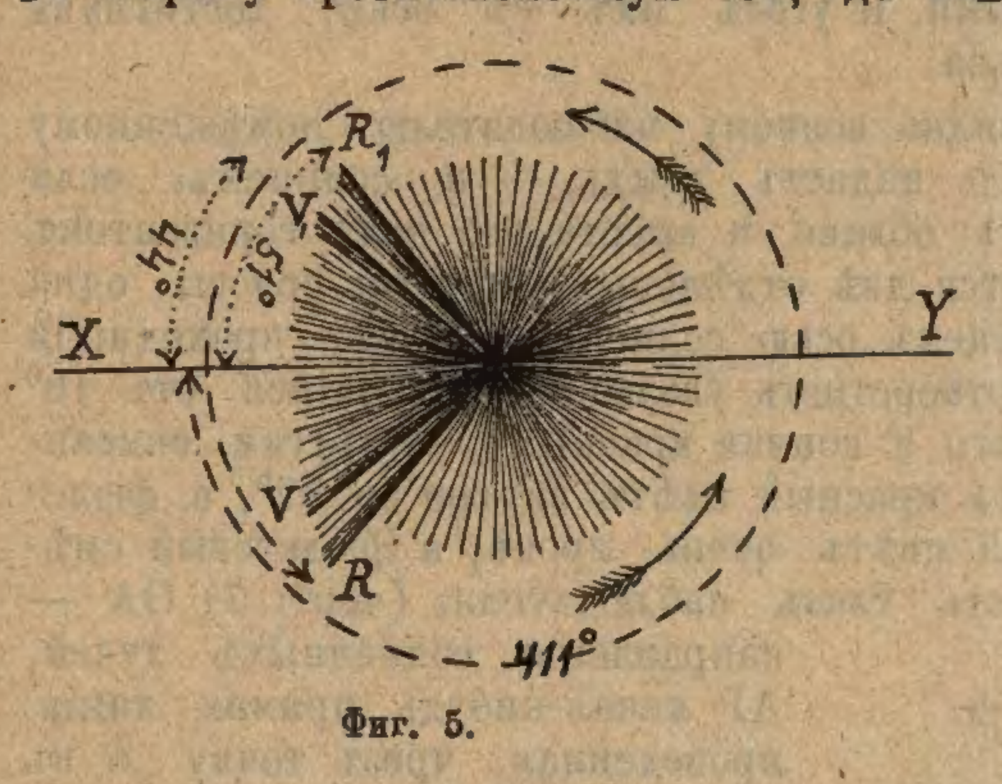
§ 7. Въ случаѣ двухъ внутреннихъ отраженій уголъ $\Delta_2 = 125^0 50' 40''$ для фіолетоваго цвѣта и $129^0 0' 48''$ для краснаго, отверстіе конуса превышаетъ 90^0 и обращено въ сторону противоположную источника свѣта, а часть неосвѣщенная RSR_1 (черт. 4) обращена въ сторону этого источника: эта часть есть конусъ, отверстіе котораго почти 51^0 для краснаго и 54^0 для фіолетоваго цвѣта. Въ разсматриваемомъ случаѣ, какъ и предыдущемъ, на поверхностяхъ предѣльныхъ конусовъ напряженіе свѣта больше, чѣмъ въ другихъ мѣстахъ, и потому поверхность VSV_1 фіолетоваго цвѣта,



Фиг. 4.

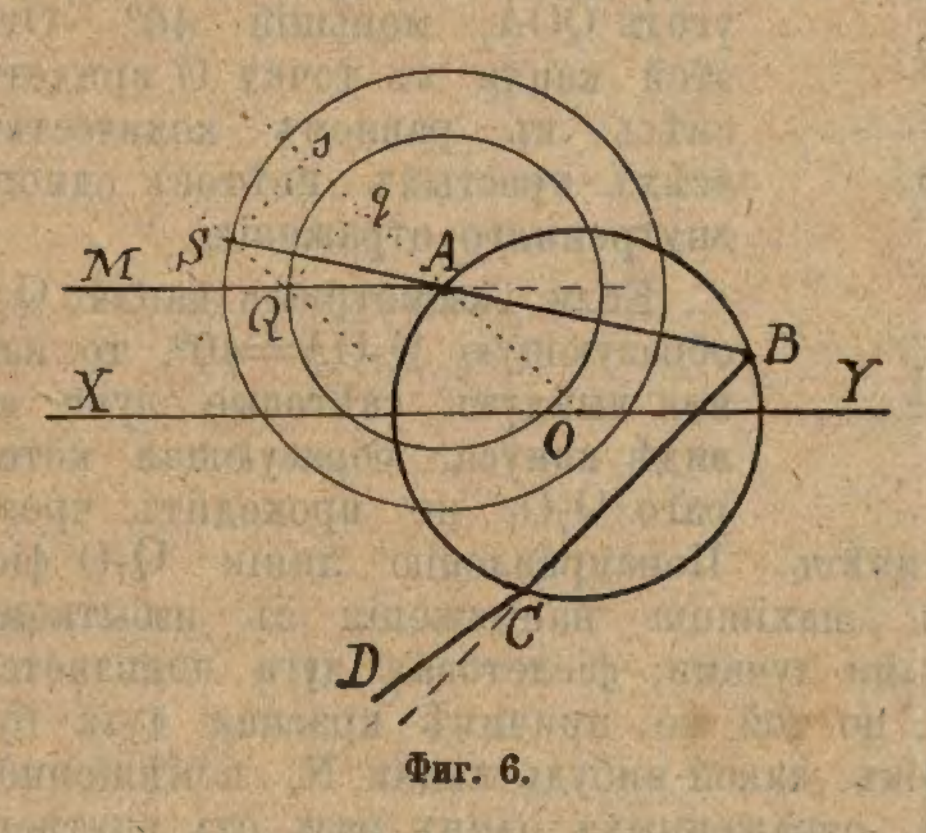
смѣшаннаго съ бѣлымъ; потомъ поверхность JSJ_1 — желтая со смѣсью оранжеваго и краснаго цвѣтовъ, и предѣльная поверхность RSR_1 ярко краснаго цвѣта.

§ 8. При $m = 3$ и $m = 4$ получаются конусы, цвѣтныя поверхности которыхъ съ наибольшимъ свѣтовымъ напряженіемъ обращены въ сторону противоположную той, гдѣ находится источникъ падающаго свѣта. Лучи эти не могутъ имѣть вліяніе на явленіе радуги. При $m=5$ (черт. 5) отверстіе конуса, ось котораго направлена къ источнику свѣта, Δ_5 равно для краснаго цвѣта $411^0 34' 46''$ и для фіолетоваго $404^0 39' 22''$; изъ этого видно, что лучи наибольшаго напряженія, лежащіе на поверхности этого конуса, направлены въ сторону источника свѣта, при чемъ фіолетовые образуютъ конусъ съ отверстіемъ почти 44^0, а красные — конусъ съ отверстіемъ почти 51^0. Въ явленіи радуги эти лучи не производятъ впечатлѣнія на глазъ, вслѣдствіе своей слабой яркости. Пропуская лучи свѣта чрезъ сферическое стекло и получая на экранѣ цвѣтные круги Бабине (Babinet) воспроизвелъ свѣтовые лучи до $m = 14$ включительно.



Фиг. 5.

§ 9. Построеніе луча, выходящаго изъ капли требуетъ только опредѣленія направленія преломленнаго луча внутри капли, что дѣлается такъ: Опишемъ изъ точки паденія A луча MA (черт. 6), какъ центра, двѣ окружности радіусами $AQ=1$ и $AS=n$. Изъ точки пересѣченія Q падающаго луча MA съ первой окружностью проведемъ прямую QS, параллельную нормали OA; эта прямая пересѣчетъ вторую окружность въ точкѣ S, лежащей на преломленномъ лучѣ SAB, п. ч., опустивъ на нормаль перпендикуляры Ss и Qq, имѣемъ изъ $\Delta\ AQq$ и $\Delta\ ASs$ —



Фиг. 6.

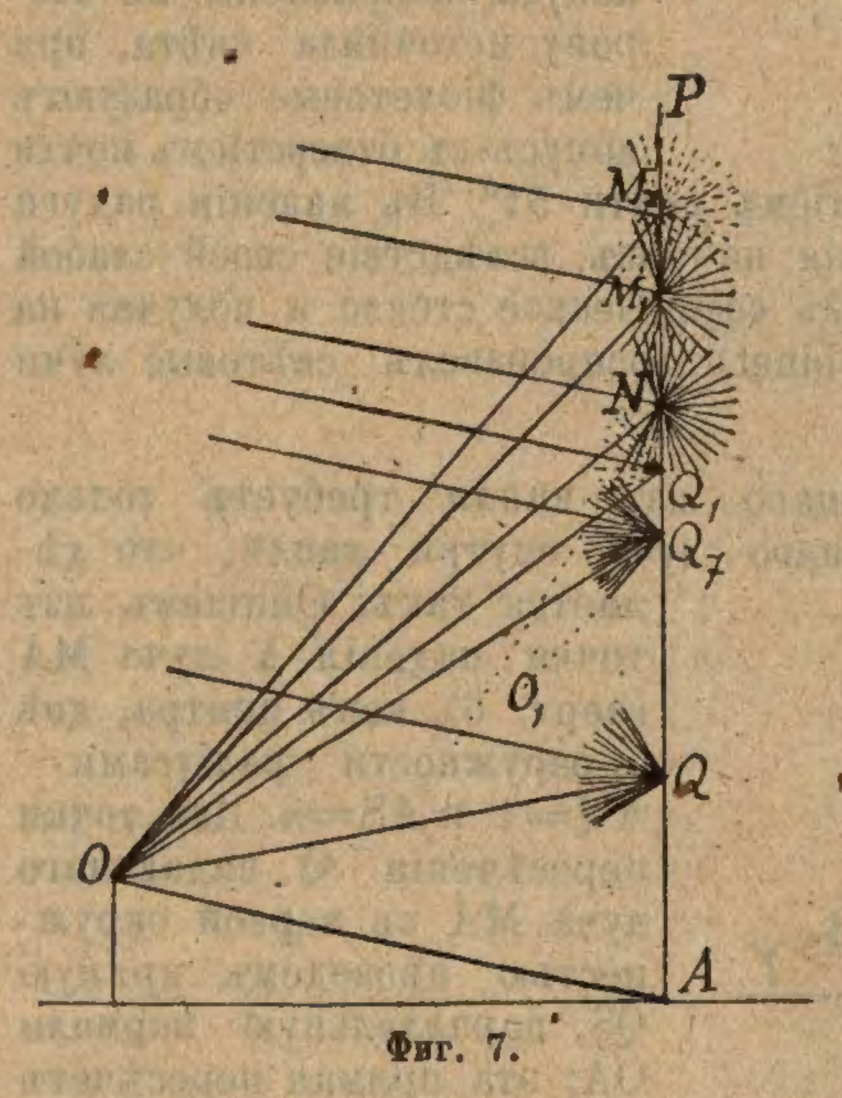
$$\text{Sn}\,i = \frac{Qq}{AQ} = Qq \text{ и } \text{SnSA}s = \frac{Ss}{AS} = \frac{Qq}{n}.$$

Откуда

$$\mathrm{S}n i = n \mathrm{S}n \mathrm{SA}s \quad \text{т. е.} \ \angle \mathrm{SA}s = \angle r.$$

Дѣлая построеніе лучей, падающихъ на каплю подъ разными углами отъ $i = 0$ до $i = \frac{\pi}{2}$, увидимъ, что съ увеличеніемъ i, уголъ выходящихъ лучей увеличивается до извѣстнаго предѣла $i = i_1$, а потомъ лучи дѣлаются параллельными, и уголъ ихъ съ осью, достигнувъ maximum, начнетъ уменьшаться

§ 10. Радуга бываетъ видна всякому наблюдателю, помѣщенному между облакомъ, изъ котораго падаетъ дождь, — и солнцемъ; если только это свѣтило освѣщаетъ облако, и высота его надъ горизонтомъ не превышаетъ 40°, появляются двѣ отдѣльныя цвѣтныя полосы: одна внутренняя на конусѣ, имѣющемъ осью солнечный лучъ, проходящій чрезъ глазъ наблюдателя, и отверстіемъ уголъ, измѣняющійся отъ 40° до 42°, начиная съ фіолетоваго и кончая краснымъ; — другая, описанная около той же оси, имѣетъ красный цвѣтъ внутри на 52°, а фіолетовый цвѣтъ на 54°. Красный цвѣтъ очень ярокъ, а фіолетовый смѣшанъ съ бѣлымъ. Пусть O есть глазъ наблюдателя, (черт. 7) OA — направленіе солнечныхъ лучей, AP какая-нибудь прямая линія, проведенная чрезъ точку A въ вертикальной плоскости, перпендикулярной къ другой вертикальной плоскости, проходящей чрезъ OA. Можно допустить, что въ каждый моментъ и въ каждой точкѣ линіи AP есть сферическая капля воды; пусть Q одна изъ капель, образующая съ OA уголъ QOA, меньшій 40° Отъ этой капли въ точку O придетъ смѣсь въ равномъ количествѣ всѣхъ простыхъ цвѣтовъ одного внутренняго отраженія.



Фиг. 7.

Если разсмотримъ каплю Q_7, образующую $Q_7OA = 40°$, то изъ нея выйдутъ свѣтовые лучи въ видѣ конуса, образующая котораго Q_7O_1 не проходитъ чрезъ точку O и имѣетъ красный цвѣтъ. Понаправленію линіи Q_7O фіолетовые лучи будутъ имѣть maximum напряженія съ избыткомъ надъ всѣми остальными простыми лучами; фіолетовая дуга появляется на 40° отъ солнечныхъ лучей; по той же причинѣ красная дуга будетъ видима на 42° въ Q_1. Изъ какой-нибудь капли N, помѣщенной надъ Q_1, ни одинъ изъ лучей, отраженныхъ одинъ разъ отъ внутренней поверхности капли, не пройдетъ чрезъ точку O. Если уголъ NOA меньше 51°, то отъ капли N пойдутъ лучи, два раза отраженные отъ внутренней поверхности капли, въ видѣ конуса, свѣтъ котораго не

приходитъ въ O; и если M_1 есть точка, образующая $\angle M_1OA = 51^0$, то изъ этой точки пойдутъ по поверхности конуса красные лучи, попадающіе въ точку O; изъ точки же M_7 такой, что уг. $M_7OA = 54^0$, попадутъ въ O лучи фіолетовые; и такимъ образомъ отъ Q_1 до M_1 будетъ полоса темная, а отъ M_1 до M_7 — цвѣтная дуга съ красной внутренней полосой и съ фіолетовой внѣшней.

Д. Гика.

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Géométrie récente du triangle).

(*Продолженіе* *)

IX. Проэкціонные и ортологическіе треугольники.

1. Проэкціоннымъ тр-комъ (*triangle podaire*) точки M относительно даннаго тр-ка ABC наз. тр-къ A'B'C', вершины котораго суть проэкціи точки M на стороны тр-ка ABC. (фиг. 1 и 2).

Тр-къ $A_1B_1C_1$, стороны котораго суть перпендикуляры къ прямымъ MA, MB, MC въ точкахъ A, B, C, наз. *антипроэкціоннымъ* тр-мъ (*triangle antipodaire*) точки M относительно тр-ка ABC. (фиг. 1 и 2).

Фиг 1.

2. Въ частномъ случаѣ, когда прямыя, составляющія тр-къ ABC пересѣкаются въ одной точкѣ (O), тр-къ A'B'C' наз. *проэкціоннымъ* тр-мъ точки M относительно трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ. (фиг. 3).

Очевидно, что *антипроэкціонный* тр-къ точки M относительно трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ (O), обращается въ прямую (PQ), перпендикулярную въ O къ прямой MO. (фиг. 3).

3. Обозначимъ чрезъ X, У, Z углы BMC, CMA, AMB, подъ которыми видны стороны тр-ка ABC изъ точки M. Если условиться считать положительными углами тѣ, у которыхъ одна сторона приводится

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" №№ 230, 231, 232, 234, 236, 239, 240, 244, 246, и 249.

въ совпаденіе съ другой чрезъ вращеніе ея около вершины угла оп направленію движенія часовой стрѣлки, а отрицательными тѣ, у которыхъ это совпаденіе сторонъ достигается вращеніемъ одной изъ нихъ въ направленіи противоположномъ, то легко убѣдиться, что

$$1) \qquad X + Y + Z = 360^\circ,$$

когда точка M находится внутри тр-ка ABC, (фиг. 1), и

$$2) \qquad X + Y + Z = 0,$$

когда точка M находится внѣ этого тр-ка (фиг. 2).

4. Въ первомъ случаѣ (фиг. 1), проведя чрезъ M параллели къ AB и AC, получимъ:

$$\angle BMC = A + \angle ABM + \angle ACM;$$

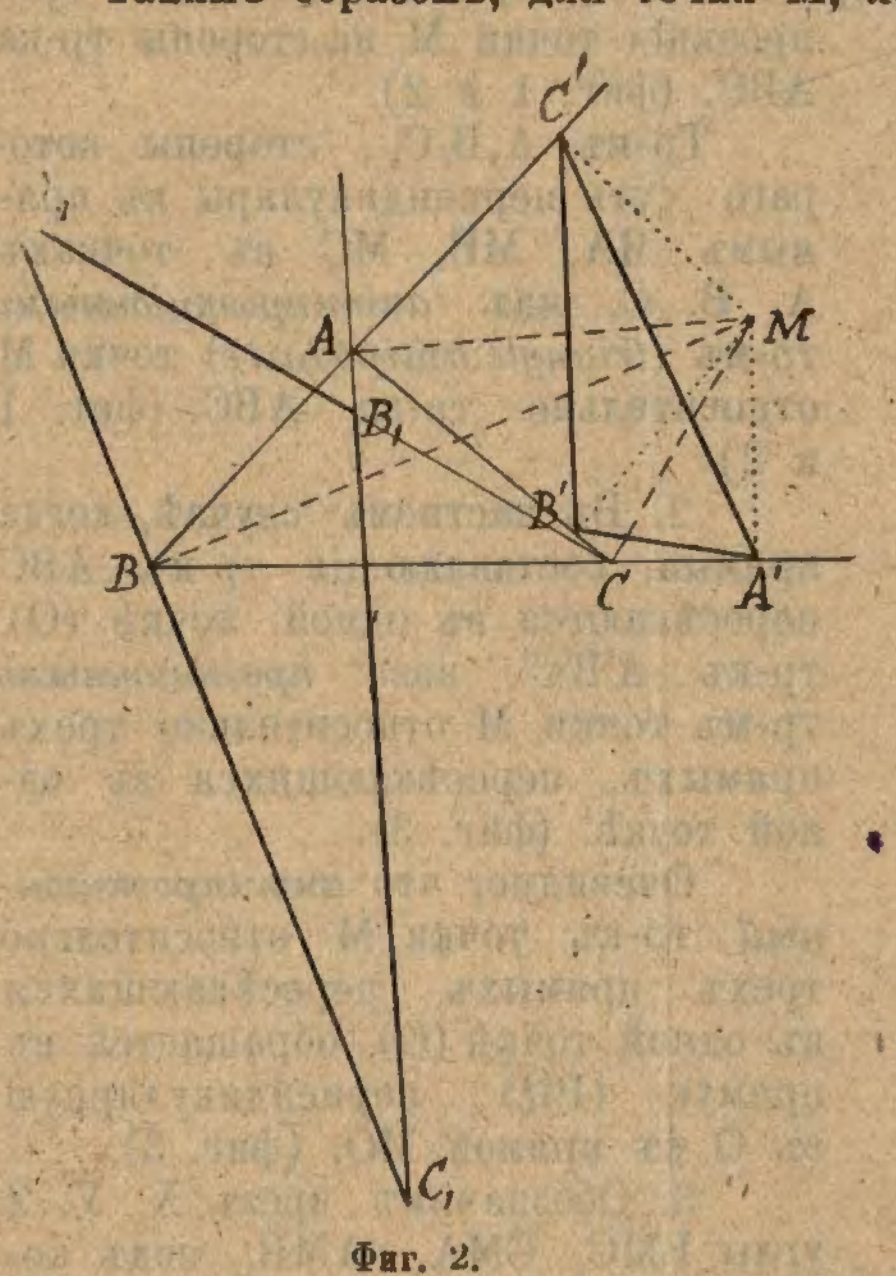
но изъ четыр-въ $CA'MB'$ и $BA'MC'$ вписывающихся въ кругъ, слѣдуетъ, что

$$\angle ACM = \angle MA'B' \text{ и } \angle ABM = \angle MA'C';$$

$$\angle BMC = A + \angle MA'C' + \angle MA'B' = A + A'.$$

Такимъ образомъ, для точки M, лежащей внутри тр-ка ABC:

$$X = A + A',$$
$$Y = B + B', \qquad (1)$$
$$Z = C + C'.$$



Фиг. 2.

5. Подобно предыдущему, найдемъ, что для точки M, находящейся внѣ тр-ка ABC (фиг. 2)

$$X = A - A',$$
$$Y = B - B', \qquad (2)$$
$$Z = C - C',$$

одинъ или два изъ этихъ угловъ должны быть отрицательными (3).

6. Изъ равенствъ (1) и (2) опредѣляются углы проэкціоннаго тр-ка ($A'B'C'$) точки M, именно:

$$A' = \pm(X - A),$$
$$B' = \pm(Y - B), \qquad (3)$$
$$C' = \pm(Z - C),$$

гдѣ знакъ $+$ передъ скобками берется для точки M находящейся внутри тр-ка ABC, а знакъ $-$ для точки M, находящейся внѣ этого тр-ка.

7. Въ томъ случаѣ, когда тр-къ ABC обращается въ точку O (фиг. 3), вершины проэкціоннаго тр-ка $A'B'C'$ суть точки пересѣченія прямыхъ AO, BO, CO съ окружностью, имѣющею діаметромъ отрѣзокъ OM. Считая углы A, B, C, составляемые прямыми OB [redacted] OC, OC и OA, OA и OB такъ, чтобы они могли быть углами тр-ка, т. е. чтобы $A + B + C = 180^0$, получимъ

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C.$$

Этотъ выводъ можно получить и изъ общихъ равенствъ (3), если у нихъ взять знакъ $-$ передъ скобками и положить $X = У = Z = 0$.

Итакъ, *проэкціонный тр-къ произвольной точки* (M) *относительно трехъ прямыхъ, пересѣкающихся въ одной точкѣ, подобенъ тр-ку, стороны котораго параллельны этимъ прямымъ.*

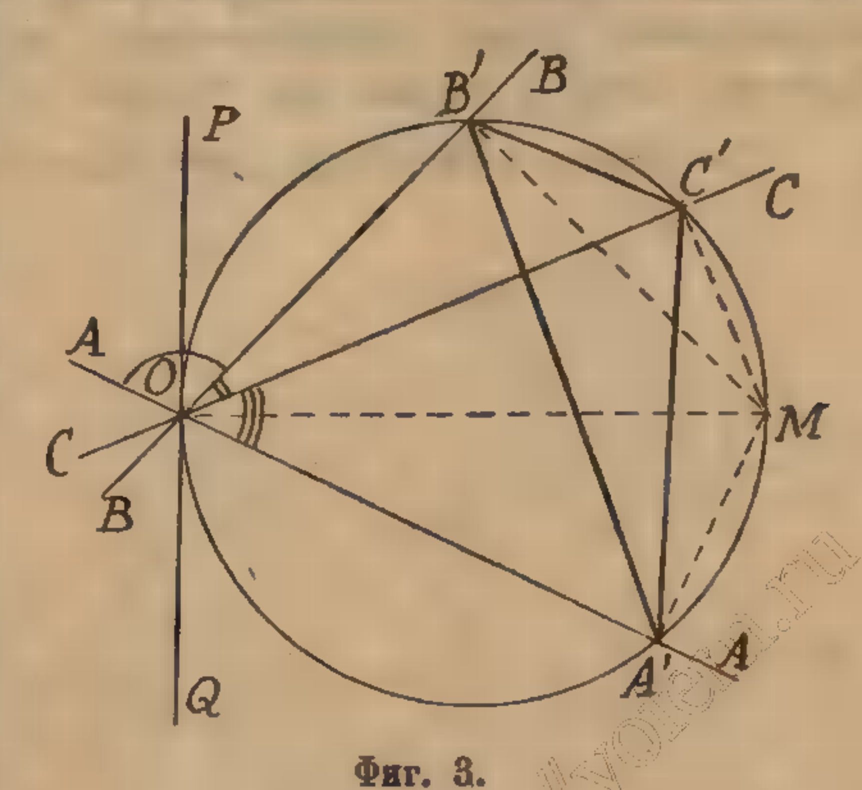
8. Углы антипроэкціоннаго тр-ка $A_1 B_1 C_1$ для точки M, находящейся внутри тр-ка ABC, очевидно (фиг. 1) суть:

$$A_1 = 180^0 - X, \quad B_1 = 180^0 - У, \quad C_1 = 180^0 - C_1 .$$

Если [redacted] точка M взята внѣ тр-ка ABC, то одинъ изъ угловъ A_1, B_1, C_1 служитъ дополнительнымъ угломъ до 180^0 соотвѣтственнаго изъ угловъ X, У, Z; другіе же два угла тр-ка $A_1 B_1 C_1$ равны соотвѣтственнымъ угламъ изъ X, У, Z. Напр. на фиг. 2.

$$A_1 = X, \quad B_1 = 180 - У, \quad C_1 = Z.$$

9. Примѣры. Тр къ, вершины котораго суть основанія высотъ тр-ка ABC, [redacted] тр-къ, составленный прямыми, параллельными сторонамъ этого тр-ка и проходящими чрезъ его вершины, суть проэкціонный [redacted] антипроэкціонный тр-ка ортоцентра (H) тр-ка ABC (I, 5).



Фиг. 3.

Тр-къ, имѣющій вершинами основанія высотъ тр-ка ABC, наз. *ортоцентрическимъ тр-мъ* тр-ка ABC (*triangle orthocentrique* ou *triangle orthique*).

10. Если I, I_1, I_2, I_3 суть центры круговъ вписаннаго [redacted] внѣвписанныхъ въ тр-къ ABC, то тр-къ, имѣющій вершинами точки касанія одного изъ этихъ круговъ и тр-къ, вершины котораго суть центры остальныхъ трехъ круговъ, суть проэкціонный и антипроэкціонный тр-ки центра перваго изъ взятыхъ круговъ относительно тр-ка ABC.

11. *Тр-къ дополнительный* тр-ка ABC (III, 9) и тр-къ, составленный касательными къ кругу ABC въ точкахъ A, B, C (*triangle tangen-*

tiel), суть проэкціонный и антипроэкціонный тр-ки центра (O) круга, описаннаго около тр-ка ABC, относительно этого тр-ка.

12. Теорема. *Геометрическое мѣсто точекъ M, для которыхъ проэкціонные тр-ки относительно тр-ка ABC имѣютъ равныя площади (равновелики), есть окружность, концентрическая съ окружностью ABC.*

Если точка M находится въ центрѣ окружности ABC, то обозначая чрезъ S′ площадь проэкціоннаго тр-ка точки M относительно тр-ка ABC, а чрезъ S — площадь этого тр-ка, получимъ:

$$S' = \frac{1}{4} S.$$

При удаленіи точки M отъ центра O окружности ABC, площадь S′ убываетъ и обращенная въ нуль, когда разстояніе MO = радіусу R окружности ABC; ибо въ этомъ случаѣ проэкціонный тр-къ точки M относительно тр-ка ABC обращается въ *прямую Симсона.* (I, 7).

При увеличеніи разстоянія OM отъ R до ∞, площадь S′ непрерывно возрастаетъ отъ O до ∞.

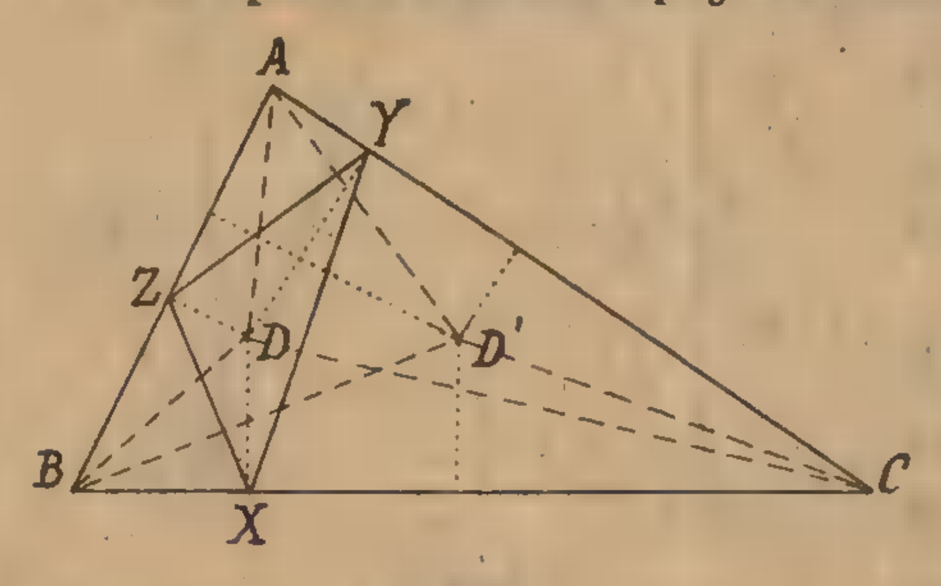
Такимъ образомъ, площадь S′ измѣняясь отъ $\frac{1}{4}$ S до безконечности, имѣетъ минимумъ O, когда точка M находится на окружности ABC. Отсюда слѣдуетъ, что для значеній S′ заключающихся по величинѣ между O и $\frac{1}{4}$ S′, существуютъ двѣ окружности, служащія геометрическими мѣстами точки M; если радіусы этихъ окружностей суть R_1 и R_2, то

$$R_1{}^2 + R_2{}^2 = 2R^2.$$

13. Теорема. *Геометрическое мѣсто точекъ M, для которыхъ проэкціонные тр-ки относительно тр-ка ABC имѣютъ равные углы Брокара, есть окружность Schoute'a.* (VIII, 10 и 11).



14. Ортологическіе треугольники. Два тр-ка наз. *ортологическими* (*triangles orthologiques*), если перпендикуляры изъ вершинъ одного изъ нихъ на стороны другого пересѣкаются въ одной точкѣ.



Фиг. 4.

Это опредѣленіе основано на слѣдующей теоремѣ, справедливость которой далѣе будетъ обнаружена въ нѣсколькихъ частныхъ случаяхъ.

Теорема. *Если перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка A′B′C′ на стороны тр-ка ABC пересѣкаются въ одной точкѣ D′ то перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка ABC на стороны тр-ка A′B′C′ тоже пересѣкаются въ одной точкѣ D.*

Точки D и D′ будемъ называть *ортологическими центрами* тр-въ ABC и A′B′C′.

15. Теорема. *Два тр-ка, изъ которыхъ одинъ есть проэкціонный относительно другаго (1), суть тр-ки ортологическіе.*

Пусть XYZ есть проэкціонный тр-къ точки D относительно тр-ка ABC (фиг. 4). Взявъ точку D′ *изогонально-сопряженную* съ D относительно тр-ка ABC, получимъ (V, 8 и 9):

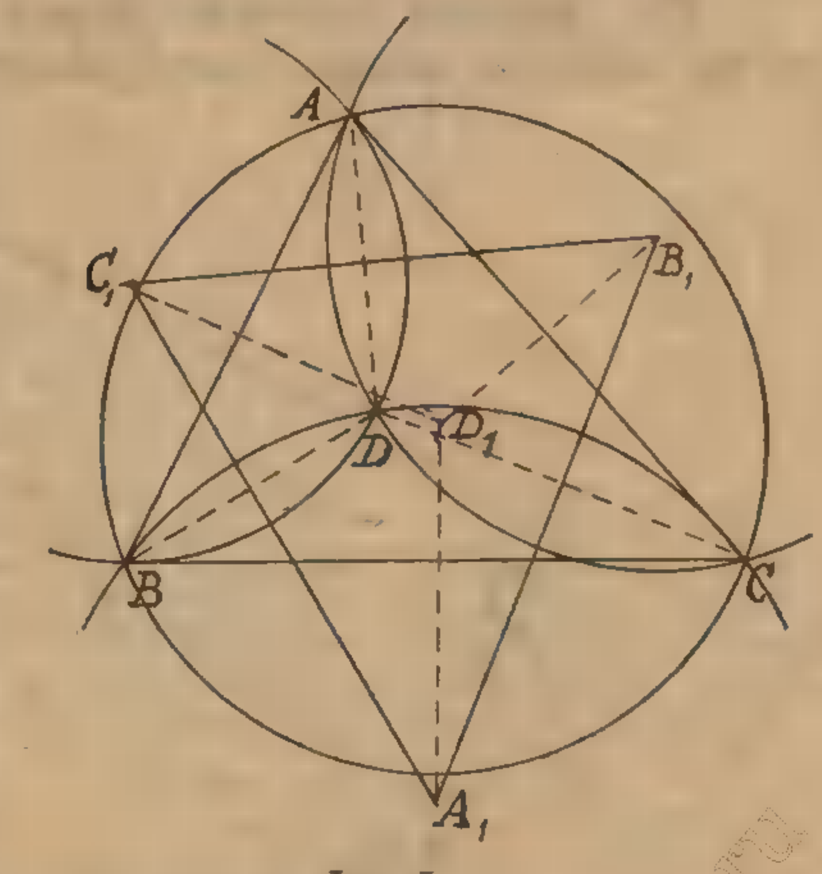
$$AD' \perp YZ,\ BD' \perp ZX,\ CD' \perp XY.$$

Такимъ образомъ, какъ перпендикуляры въ вершинахъ тр-ка XYZ къ сторонамъ тр-ка ABC пересѣкаются въ одной точкѣ D, такъ и перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка ABC на стороны тр-ка XYZ пересѣкаются въ одной точкѣ D′, изогонально сопряженной съ D. Слѣдовательно, тр-ки ABC и XYZ суть тр-ки ортологическіе.

Слѣдствіе. *Изогонально сопряженныя точки тр-ка* суть ортологическіе чентры этого тр-ка и тр-ка проэкціоннаго каждой изъ этихъ точекъ.

16. Теорема. *Если A_1, B_1, C_1 суть центры круговъ, описанныхъ около тр-въ BCD, CAD, ABD, гдѣ D произвольная точка въ плоскости тр-ка ABC, то тр-ки ABC и $A_1B_1C_1$ — суть тр-ки ортологическіе.* (фиг. 5).

Прямыя A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 соотвѣтственно перпендикулярны къ общимъ хордамъ CD, AD и BD окружностей BDC и ADC, CDA и ADB, ADB и BDC; значитъ, перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка ABC на стороны тр-ка $A_1B_1C_1$ пересѣкаются въ одной точкѣ D. Перпендикуляры изъ вершинъ тр ка $A_1B_1C_1$ на соотвѣтственныя стороны тр-ка ABC также пересѣкаются въ одной точкѣ D_1, служащей центромъ круга ABC, ибо каждый изъ этихъ перпендикуляровъ проходитъ чрезъ средину соотвѣтственной стороны тр-ка.



Фиг. 5.

Такимъ образомъ D и D_1 суть ортологическіе центры тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$. Очевидно, что *центръ круга описаннаго около даннаго тр-ка можетъ составлять пару ортологическихъ центровъ съ произвольной точкой, взятой въ плоскости этого тр-ка.*

17. Теорема. *Взаимно-полярные тр-ки суть тр-ки ортологическіе.* (фиг. 6).

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ суть взаимно-полярные тр-ки относительно круга O. (II, 15). Такъ какъ поляра точки относительно даннаго круга

перпендикулярна къ прямой, соединяющей эту точку съ центромъ круга (II, 10), то

$$AO \perp B_1C_1,\quad BO \perp C_1A_1,\quad CO \perp A_1B_1$$

и

$$A_1O \perp BC,\quad B_1O \perp CA,\quad C_1O \perp AB.$$

Слѣдовательно, *ортологическіе центры взаимно-полярныхъ тр-въ совпадаютъ съ центромъ круга полярности.*

18. Теорема. *Произвольный тр-къ ABC и тр-къ, составленный внѣшними биссектриссами его, суть ортологическіе тр-ки.* (фиг. 7).

Внѣшнія биссектриссы тр-ка ABC попарно пересѣкаются въ центрахъ I_1, I_2, I_3 внѣвписанныхъ круговъ тр-ка ABC; поэтому обозначивъ чрезъ I центръ круга вписаннаго въ этотъ тр-къ, получимъ:

$$I_1I_1 \perp AI;\quad I_3I_1 \perp BI\quad I_1I_2 \perp CI;$$

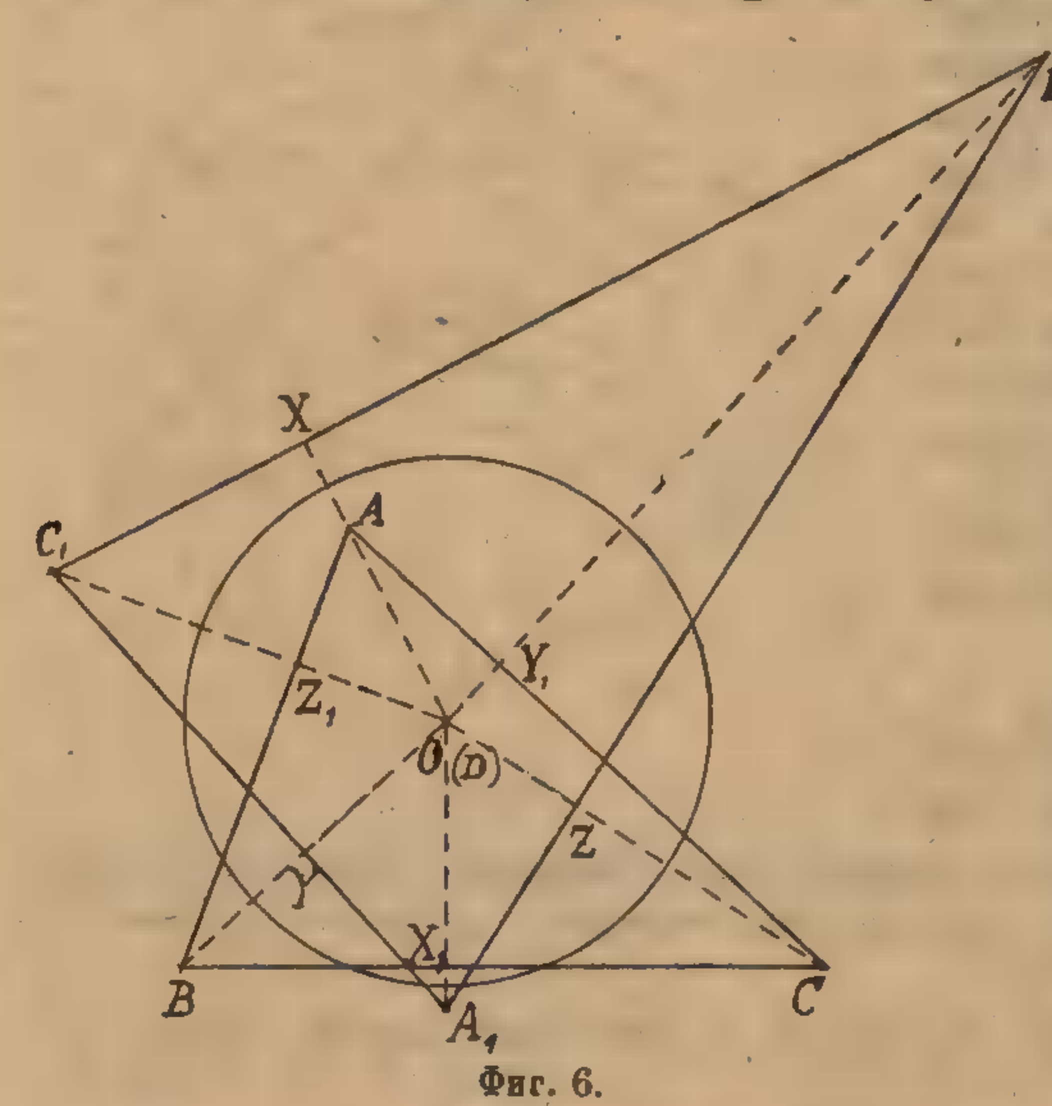
слѣдовательно, перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка ABC на стороны тр-ка $I_1I_2I_3$ пересѣкаются въ одной точкѣ I. Съ другой стороны, обозначивъ чрезъ I_0 центръ круга $I_1I_2I_3$, получимъ (V, 7):

$$I_1I_0 \perp BC,\quad I_2I_0 \perp CA,\quad I_3I_0 \perp AB,$$

т. е. перпендикуляры изъ вершинъ тр-ка $I_1I_2I_3$ [redacted] стороны тр-ка ABC пересѣкаются въ одной точкѣ I_0.

Итакъ, точки I и I_0 суть ортологическіе центры тр-въ ABC и $I_1I_2I_3$.

19. Теорема Soons'а. *Пусть A′, B′, C′ суть проэкціи вершинъ тр-ка ABC на прямую m. Перпендикуляры A′A″, B′B″, C′C″ изъ точекъ A′,B′,C′ на стороны тр-ка BC, CA, AB пересѣкаются въ одной точкѣ M. Если прямая* [redacted] *проходитъ чрезъ центръ O круга ABC, то точка M находится на окружности 9-ти точекъ тр-ка ABC.*



Фиг. 6.

Прямую A′B′C′ (фиг. 8) можно разсматривать какъ тр-къ ортологическій съ тр-мъ ABC, ибо перпендикуляры AA′, BB′, CC′, какъ параллельныя прямыя, пересѣкаются въ одной, безконечно-удаленной точкѣ; а потому перпендикуляры A′A″, B′B″, C′C″ должны также пересѣкаться въ одной точкѣ (14).

Тоже можно доказать и независимо отъ общей теоремы (14). Допустимъ, что A′A″ пересѣкается съ B′B″ и C′C″ въ точкахъ M и M′.

Обозначивъ чрезъ K пересѣченіе AA′ съ BC, получимъ двѣ пары подобныхъ тр-въ B′A′M и AKC, C′A′M′ и AKB (сходственныя стороны этихъ тр-въ перпендикулярны); поэтому:

$$\frac{A'M}{KC}=\frac{A'B'}{AK}, \quad \frac{A'M'}{KB}=\frac{C'A'}{AK};$$

отсюда

$$\frac{A'M \cdot KB}{A'M' \cdot KC}=\frac{A'B'}{A'C'}, \text{ или } \frac{A'M}{A'M'}=\frac{A'B'}{A'C'} : \frac{KB}{KC};$$

но

$$\frac{KB}{KC}=\frac{A'B'}{A'C'}, \text{ слѣдов. } \frac{A'M}{A'M'}=1,$$

т. е. точки M и M′ совпадаютъ.

Обозначимъ чрезъ α, β, γ центры окружностей, имѣющихъ діаметрами отрѣзки OA, OB, OC; эти окружности проходятъ соотвѣтственно чрезъ точки A′, B′, C′. Такъ какъ AA′ и BB′ перпендикулярны къ A′B′, то перпендикуляръ, возставленный въ срединѣ L этого отрѣзка пройдетъ чрезъ средину F стороны AB. Кромѣ того,

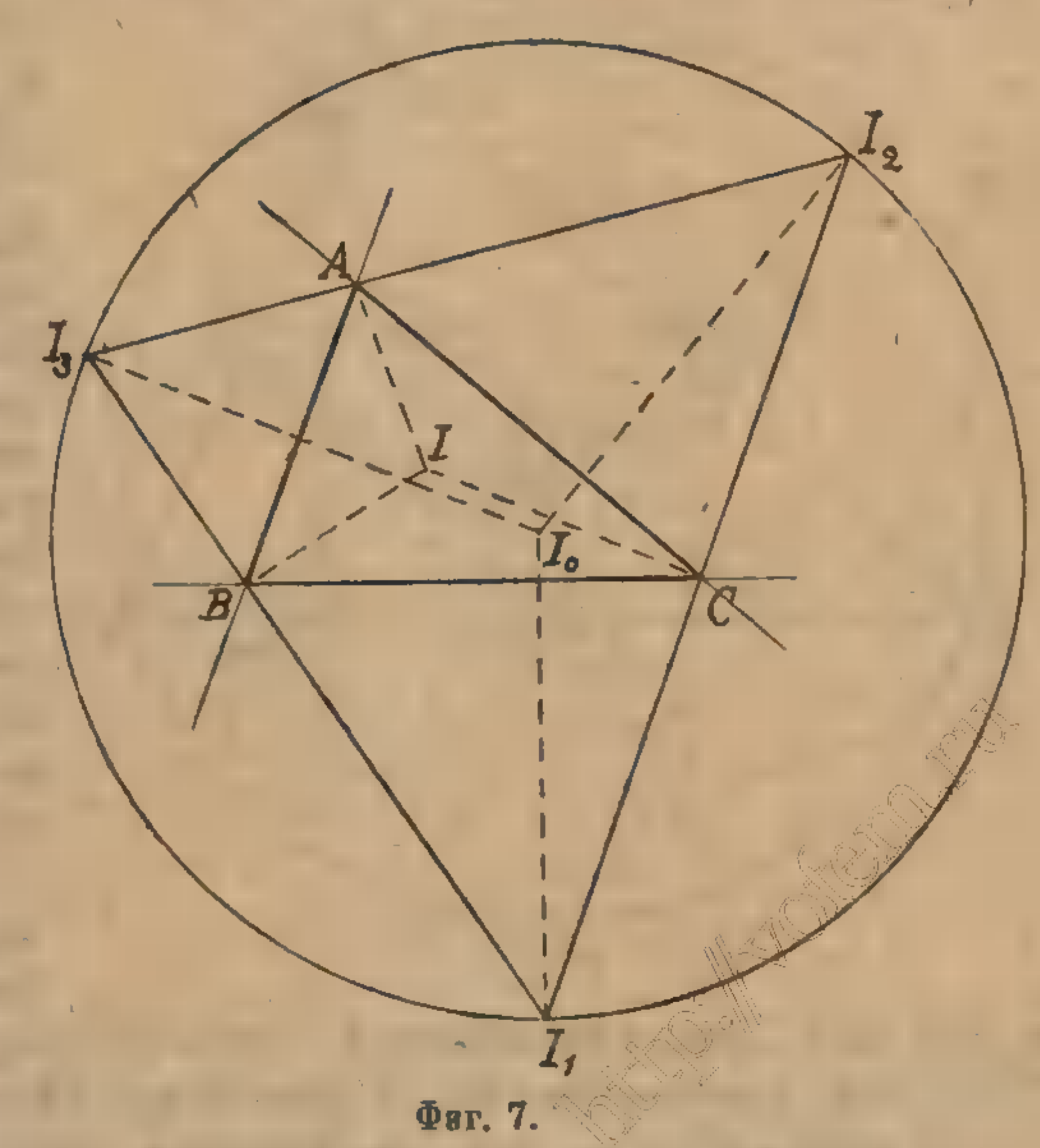
$$\angle FB'A' = \angle FBO = 90^0 - \angle C = 90^0 - \angle B'MA';$$

поэтому

$$\angle B'FL = \angle B'MA';$$

слѣдовательно, F есть центръ круга MA′B′ и прямыя EF и DF (D и E суть средины сторонъ BC и AC) соотвѣтственно перпендикулярны къ MA′ и MB′ и дѣлятъ эти отрѣзки пополамъ. Такимъ образомъ, проэкціи точки M на стороны тр-ка DEF находятся на одной прямой, параллельной m и равноотстоящей отъ этой прямой и точки M, а потому точка M лежитъ на окружности DEF, т. е. на окружности 9-ти точекъ тр-ка ABC (I, 12).

Обратно, точки A′, B′, C′, симметричныя съ какою нибудь точкой M окружности 9-ти точекъ тр-ка ABC относительно сторонъ дополнительнаго тр-ка (III, 9) DEF, находятся на одной прямой проходящей чрезъ центръ круга ABC, а перпендикуляры въ A′, B′, C′, къ этой прямой проходятъ чрезъ вершины тр-ка ABC.



Фиг. 7.

20. Приложенія. Полные четырехъ-сторонники. (*Quadrangles complets*). *Полнымъ четырехъ-сторонникомъ* наз. прямолинейная фигура, опредѣляющаяся четырьмя точками; эти точки наз. *вершинами* четырехъ-сторонника, [redacted] прямыя, соединяющія ихъ по двѣ, наз. его *сторонами*.

Шесть сторонъ четырехъ-сторонника составляютъ три пары *сторонъ противоположныхъ*. Если вершины четырехъ-сторонника заданы въ порядкѣ A, B, C, D, то противоположными сторонами его условились считать:

AB [redacted] CD, AC и BD, AD и BC.

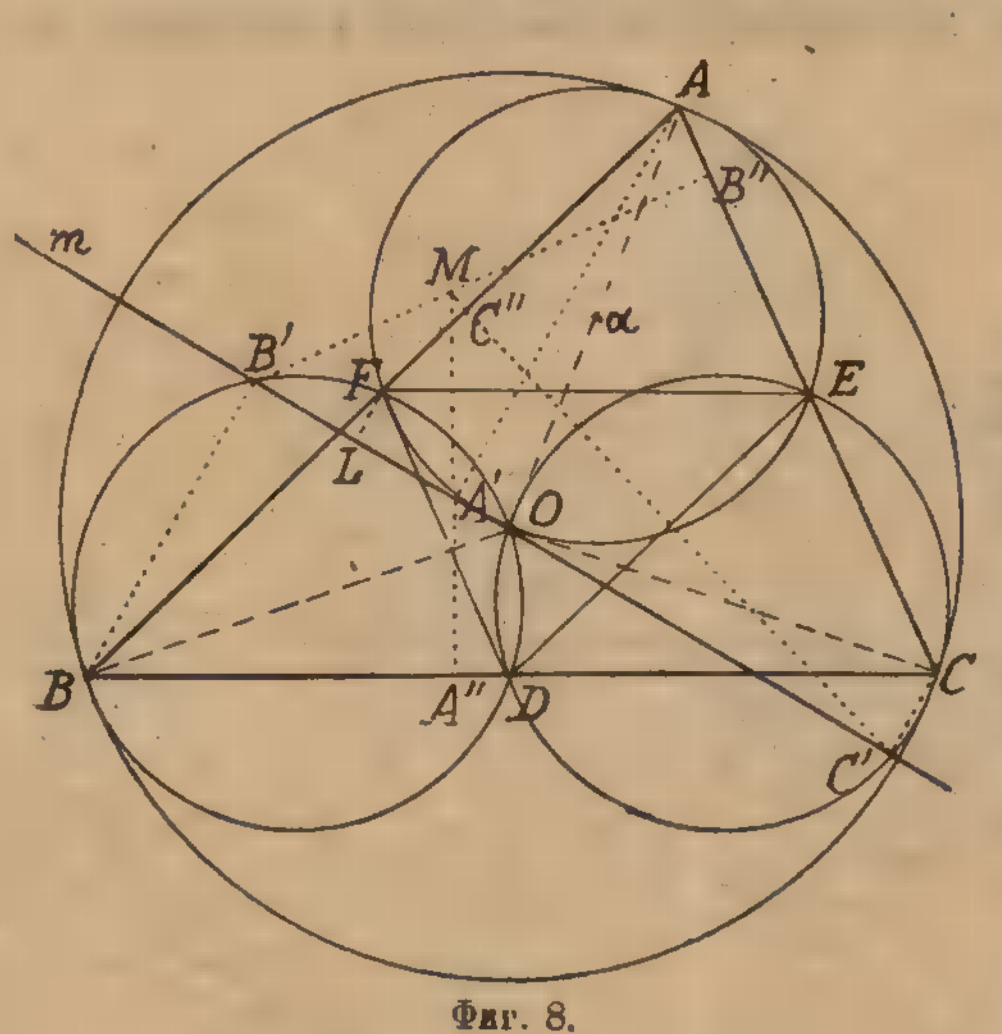
Когда разсматриваются два полныхъ четырехъ-сторонника ABCD [redacted] $A_1B_1C_1D_1$, то, принимая во вниманіе порядокъ буквъ A, B, . . . и A_1, B_1, . . ., условились называть стороны ихъ

AB [redacted] C_1D_1, AC и B_1D_1, BC и A_1D_1,

A_1B_1 и CD, A_1C_1 и BD, B_1C_1 [redacted] AD

противоположными сторонамъ разсматриваемыхъ четырехъ-сторонниковъ.

21. Тр-къ ABC [redacted] точка D въ его плоскости образуютъ полный четырехъ-сторонникъ. Поэтому изъ теоремы (16) можно вывести, что *для даннаго четырехъ-сторонника ABCD всегда можно построить другой четырехъ-сторонникъ $A_1B_1C_1D_1$, такъ что противоположныя стороны ихъ (20) будутъ взаимно перпендикулярны.*



Фиг. 8.

Отсюда, чрезъ вращеніе одного изъ четырехъ-сторонниковъ, получается болѣе общій выводъ, именно:

Если пять паръ противоположныхъ сторонъ двухъ четырехъ-сторонниковъ составляютъ равные углы или симметричны (по направленію) относительно какой нибудь прямой въ ихъ общей плоскости, то шестая пара противоположныхъ сторонъ ихъ составляютъ такой [redacted] уголъ, или симметричны относительно той же прямой.

22. Метаполярные четырехъ-сторонники. Два четырехъ-сторонника ABCD и $A_1B_1C_1D_1$, противоположныя стороны которыхъ составляютъ равные углы, наз. *метаполярными* (métapolaires). (фиг. 5).

Теорема. *Если двѣ одноименныя вершины (A [redacted] A_1) двухъ полныхъ четырехъ-сторонниковъ совпадаютъ, а противоположныя стороны*

ихъ взаимно перпендикулярны, то треугольники, составленные остальными вершинами ихъ (BCD *и* $B_1C_1D_1$, *взаимно полярны* (II, 15) *относительно круга, имѣющаго центромъ общую вершину четырехъ-сторонниковъ.*

Очевидно, что общая вершина (A, A_1) такихъ двухъ четырехъ-сторонниковъ есть общій ортологическій центръ тр-въ BCD и $B_1C_1D_1$ (17).

23. Обозначивъ чрезъ X, $У$, Z и X_1, $У_1$, Z_1 пересѣченія прямыхъ AD, BC, CD съ B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 и A_1D, B_1C, C_1D съ BC, CA, AB для взаимно полярныхъ ортологическихъ тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$ (фиг. 6), по свойству поляръ, получимъ (II, 10):

$$DA.DX = DB.DУ = DC.DZ = r^2 = DX_1.DA_1 = DУ_1.DB_1 = DZ_1.DC_1,$$

гдѣ r радіусъ круга полярности тр-въ. Замѣнивъ здѣсь D чрезъ A (и A_1) и A и A_1 чрезъ D и D_1, получимъ такой выводъ:

Если двѣ вершины (A ■ A_1) *четырехъ-сторонниковъ* $ABCD$ *и* $A_1B_1C_1D_1$ *совпадаютъ, а противоположныя стороны ихъ перпендикулярны, то разстоянія вертины* A *отъ вершинъ и сторонъ тр-ка* BCD *обратно пропорціональны разстояніямъ вершины* A_1 *отъ сторонъ* ■ *вершинъ тр-ка* $B_1C_1D_1$.

Д. Е.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

По поводу статьи „Рѣшеніе кубическаго уравненія" С. Гирмана.

Въ своей статьѣ „Рѣшеніе кубическаго уравненія" („В. О. Ф.", № 255) С. Гирманъ уравненіе

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (1)$$

подс..новкою $y = mz$ приводитъ къ виду

$$z^3 - 3z - 2u = 0 \qquad (2)$$

и уже къ этому послѣднему примѣняетъ подстановку $z = u - \frac{1}{u}$, сводя его этимъ къ биквадратному ($u^3 = t$)

Такое рѣшеніе представляетъ то неудобство, что (2) имѣетъ во обще коэффиціенты ирраціональные.

Проще непосредственно къ (1) примѣнить подстановку

$$y = u + \frac{m}{u} \qquad (3)$$

дѣйствительно

$$y^3 = u^3 + \frac{m^3}{u^3} + 3m\left(u + \frac{m}{u}\right)$$

и слѣдовательно

$$y^3+py+q=u^3+\frac{m^3}{u^3}+q+(3m+p)\left(u+\frac{m}{u}\right).$$

Если слѣдовательно

$$3m-p=0,\quad m=-\frac{p}{3},$$

то приходимъ къ уравненію

$$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$$

которое пом.

$$z=u^3$$

приводитъ къ

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0. \qquad (4)$$

Отсюда мы [redacted] получимъ формулу Кардана, что вполнѣ понятно ибо прилагаемый способъ есть лишь легкое видоизмѣненіе способа Hudde, общепринятаго въ учебникахъ.

Мнѣ кажется, что лучше прямо вводить подстановку (4), чѣмъ полагать сначала $y=u+v$ и затѣмъ $3uv+p=0$.

Д. Синцовъ (Казань)

Задачи на испытаніяхъ зрѣлости въ 1899 г.

Уральское войсковое реальное училище.

VI классъ.

Алгебра. Нѣкто внесъ въ банкъ 1000 рублей, по столько сложныхъ процентовъ, сколько единицъ въ корнѣ уравненія

$$\frac{\sqrt{2x+10}+\sqrt{2x-11}}{\sqrt{2x+10}-\sqrt{2x-11}}=2 \qquad (3)$$

и черезъ 20 лѣтъ сталъ брать изъ банка ежегодно одну и ту же сумму денегъ, въ концѣ года, такъ что къ концу 30-го года отъ взноса у него въ банкѣ ничего не осталось. Какую сумму онъ бралъ [redacted] банка ежегодно?

Геометрія. Шаръ пересѣченъ плоскостью такъ, что площадь сѣченія дѣлитъ перпендикулярный къ ней радіусъ пополамъ. На этой площади, какъ [redacted] основаніи, построенъ прямой конусъ, въ большемъ сегментѣ шара; вершина конуса [redacted] поверхности шара. Объемъ этого конуса $v=75{,}36$ куб. сантиметрамъ.

Опредѣлить, какъ великъ радіусъ основанія конуса и объемъ шара?

Тригонометрія. Въ $\triangle\ ABC$ даны: $c = 50$ метрамъ, $b = 48$ метрамъ, [redacted] уголъ C удовлетворяетъ уравненію

$$\cos C + \cos 2C = \frac{[redacted]}{25}.$$

Подъ какимъ угломъ къ сторонѣ AB надобно бы провести прямую $AD = 46$ метрамъ, чтобы площадь треугольника ABD, образовавшагося изъ AB, BD и AD, была равна одной трети площади даннаго треугольника?

VII (дополнительный) классъ.

Алгебра. Наименьшее значеніе выраженія $\frac{11}{27}x(4-x)^3$ разложить на двѣ такія части, чтобы отъ раздѣленія большей на большій корень уравненія, [redacted] меньшей на меньшій корень уравненія

$$x - \frac{12}{2x + a - ax - 2} = \frac{6ax^{-1}}{a-2} - \frac{3ax^{-2}}{1 - \frac{1}{2}a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{[redacted]}}$$

получить два числа, сумма которыхъ составила бы второй членъ безконечно убывающей кратной прогрессіи, которой знаменатель $= \frac{2}{3}$, а первый членъ менѣе суммы всѣхъ членовъ на 1.

Геометрія. Опредѣлить вѣсъ мѣдной треугольной призмы, имѣющей слѣдующіе размѣры: сторона AB основанія ABC равна діаметру шара, имѣющаго объемъ 2000 куб. сантиметровъ; прилежащій къ ней уголъ $\angle m = 21^\circ 25' 12{,}5''$, а другой прилежащій уголъ опредѣляется изъ уравненія

$$16 \operatorname{tg} p = 15 \cos p.$$

Высота призмы равна сторонѣ правильнаго треугольника, вписаннаго въ большой кругъ упомянутаго шара.

(Уд. в. мѣди 8,8).

Приложеніе алгебры къ геометріи. Въ данный кругъ, радіуса R, вписать равнобедренный треугольникъ, [redacted] сумму его основанія a и высоты h.

П. Свѣшниковъ,

Уральскъ
1899 г. мая [redacted] дня.

ЗАДАЧИ.

№ 559. Опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится произведеніе

$$\cos A \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{4} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cos\frac{A}{2^n}$$

при увеличеніи n до безконечности.

И. Вонсикъ (Воронежъ).

№ 560. Доказать, что при n цѣломъ выраженіе

$$n^6 - 2n^4 - 3n^3 + n^2 - 6n$$

всегда дѣлится безъ остатка на 9.

Л. Магазаникъ (Бердичевъ).

№ 561. При какихъ условіяхъ выраженіе

$$7^{2n+4} - 2^{4n+2},$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число, дѣлится на 65 безъ остатка?

(Заимств.) *В. Г.*

№ 562. Рѣшить систему

$$\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}} = 7$$

$$\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{xy}} - (x - y) = 14.$$

С. Окуличъ (Варшава).

№ 563. По данному углу C треугольника ABC и равенству

$$AB \,.\, BC = 2AD \,.\, DC,$$

гдѣ D — точка прикосновенія вписаннаго круга къ сторонѣ AC, найти остальные углы треугольника.

С. Адамовичъ. (Двинскъ).

№ 564. Опредѣлить:

1) плотность алкоголя, 2) плотность твердаго тѣла, которое вѣситъ въ пустотѣ 2100 грамм., въ водѣ 2000 грамм. и въ алкоголѣ 2020 граммовъ.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 401 (3 сер.). *Рѣшить систему уравненій*

$$\sin^2 x - \sin^2(y - z) = a$$

$$\sin^2 y - \sin^2(z - x) = b$$

$$\sin^2 z - \sin^2(x - y) = c.$$

Лѣвую часть перваго уравненія представимъ въ видѣ

$$[\sin x + \sin(y - z)][\sin x - \sin(y - z)].$$

Пользуясь формулой суммы синусовъ, преобразуемъ это выраженіе въ равное ему

$$4\sin\frac{x+y-z}{2}\cdot\cos\frac{x-y+z}{2}\cdot\sin\frac{x-y+z}{2}\cdot\cos\frac{x+y-z}{2}.$$

Пользуясь формулой sinus'a двойного угла, приведемъ это выраженіе къ болѣе простому виду

$$\sin(x+y-z)\cdot\sin(x-y+z).$$

Такимъ образомъ данная система уравненій приводится къ слѣдующей:

$$\sin(x+y-z)\,.\,\sin(x-y+z)=a$$

$$\sin(-x+y+z)\,.\,\sin(x+y-z)=b \qquad (1)$$

$$\sin(-x+y+z)\,.\,\sin(x-y+z)=c.$$

Перемноживъ эти уравненія и извлекая изъ обѣихъ частей полученнаго уравнененія квадратный корень, найдемъ

$$\sin(x+y-z)\ \sin(x-y+z)\,.\,\sin(-x+y+z)=\sqrt{abc}\,.$$

Раздѣливъ это уравненіе послѣдовательно на каждое изъ уравненій, (1) получимъ

$$\sin(-x+y+z)=\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

$$\sin(x-y+z)=\sqrt{\frac{ac}{b}}$$

$$\sin(x+y-z)=\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

Изъ этихъ уравненій получимъ

$$-x+y+z=arc\sin\sqrt{\frac{bc}{a}} \qquad (2)$$

$$x-y+z=arc\sin\sqrt{\frac{ac}{b}} \qquad (3)$$

$$x+y-z=arc\sin\sqrt{\frac{ab}{c}} \qquad (4)$$

сложивъ уравненія (2) и (3), найдемъ:

$$x=\frac{1}{2}arc\sin\sqrt{\frac{ac}{b}}+\frac{1}{2}arc\sin\sqrt{\frac{ab}{c}}$$

также найдемъ, что

$$y = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{bc}{a}} + \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

$$z = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{bc}{a}} + \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{ac}{b}}.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *Н. С.* (Одесса).

№ 383 (3 сер.). *Построить треугольникъ по данной сторонѣ, по высотѣ, опущенной на эту сторону и по биссектору противолежащаго угла.*

Пусть AB — данная сторона, CD — высота, CE — биссекторъ угла C искомаго треугольника, O — центръ круга описаннаго. Продолженіе биссектора CE встрѣтитъ окружность O въ точкѣ F, срединѣ одной изъ дугъ AB; поэтому діаметръ FF' перпендикуляренъ къ срединѣ AB. Уголъ COF' извѣстенъ: онъ вдвое болѣе угла CFF', равнаго углу FCD; а этотъ послѣдній уголъ легко построить, построивъ прямоугольный треугольникъ ECD по гипотенузѣ CE и катету CD. Точка C лежитъ на прямой $A'B'$, параллельной AB и отстоящей отъ нея на данномъ разстояніи CD; точка C удовлетворяетъ, кромѣ того, условіямъ:

$$\angle COF' = 2\angle ECD, \ CO = OB.$$

Поэтому для нахожденія точки C достаточно произвести слѣдующій рядъ построеній, основанныхъ на методѣ подобія: построить прямую XY, перпендикулярную къ отрѣзку AB въ его срединѣ, провести вышеуказанную прямую $A'B'$; точку пересѣченія этихъ прямыхъ G соединить съ точкой B прямою; изъ произвольной точки O' перпендикуляра XY провести къ прямой $A'B'$ наклонную $O'C'$, подъ угломъ

$$C'O'G = 2\angle ECD$$

къ прямой $O'G$, сдѣлать на прямой GB изъ O' засѣчку B' радіусомъ $O'C'$; затѣмъ провести $BO \parallel B'O'$ до пересѣченія въ точкѣ O съ прямой XY и $OC \parallel O'C'$ до пересѣченія въ точкѣ C съ прямой $A'B'$. Треугольникъ ABC есть искомый.

А. Шверцель (Курскъ); *П. Соловьевъ* (Нижній-Новгородъ); *М. Зиминъ* (Орелъ) *Л. Магаваникъ* (Бердичевъ).

№ 488 (3 сер.). *Черезъ точку* J, *представляющую центръ шара, вписаннаго въ тетраэдръ* SABC, *проведена плоскость, дѣлящая объемъ тетраэдра пополамъ. Доказать, что эта же плоскость дѣлитъ поверхность тетраэдра на двѣ равныя части.*

Плоскость, дѣлящая объемъ тетраэдра пополамъ, разсѣкаетъ его на два многогранника. Разобьемъ эти многогранники на пирамиды съ

вершинами въ точкѣ J. Высотами этихъ пирамидъ будетъ служить радіусъ r вписаннаго въ тетраэдръ шара. Пусть основанія пирамидъ перваго многогранника суть S, S_1, . . . , а основанія пирамидъ второго многогранника — S', S'_1, . . .

По условію

$$\frac{r}{3}(S+S_1+\ldots)=\frac{r}{3}(S'+S'_1+\ldots),$$

откуда

$$S+S_1+\ldots=S'+S'_1+\ldots,$$

что и требовалось доказать.

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону); *Н. С.* (Одесса).

№ 489 (3 сер.). *Доказать, что если*

$$a+b+c=1,$$

гдѣ a, b, c *числа положительныя, то*

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5.$$

При положительномъ a имѣемъ

$$\sqrt{4a+1}<2a+1, \qquad (1)$$

въ чемъ убѣждаемся, возвышая обѣ части неравенства въ квадратъ.

Поэтому

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<2(a+b+c)+3.$$

или, такъ какъ

$$a+b+c=1,$$

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5. \qquad (2)$$

Замѣтимъ при этомъ, что нѣтъ надобности предполагать числа a, b, c положительными.

Дѣйствительно, для того, чтобы неравенство (1) имѣло смыслъ, достаточно предположить

$$a\geqslant-\frac{1}{4}.$$

Поэтому и неравенство (2) окажется справедливымъ при

$$a+b+c=1$$

и

$$a\geqslant-\frac{1}{4},\ b\geqslant-\frac{1}{4},\ c\geqslant-\frac{1}{4}.$$

С. Адамовичъ (Двинскъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ н. Д.).

№ 492 (3 сер.) *По двумъ взаимно перпендикулярнымъ прямымъ по направленію къ точкѣ O ихъ пересѣченія движутся равномѣрно двѣ точки: точка A — со скоростью 4-хъ сант. и точка B — со скоростью 3-хъ сант. въ секунду. Въ нѣкоторый моментъ разстояніе OA = 75 сант. и разстояніе OB = 50 сант. Найти* minimum *разстоянія AB.*

По прошествіи x секундъ отъ момента, указаннаго въ задачѣ, разстояніе AB движущихся точекъ A и B выражается формулой:

$$\overline{AB}^2 = (75 - 4x)^2 + (50 - 3x)^2 = 25\,(x^2 - 36x + 325) =$$

$$= 25\,[(x - 18)^2 + 1].$$

AB будетъ наименьшее при

$$x = 18.$$

Тогда

$$\overline{AB}^2 = 25,\ AB = 5.$$

Я. Полушкинъ (Знаменка); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ-на-Дону).

Отъ издателя.

Вслѣдствіе небрежности „Центральной Типографіи“, которая разсылала въ послѣднее время „Вѣстникъ Опытной Физики“ подписчикамъ, большая часть экземпляровъ № 271-го была уничтожена. Оставшіеся въ небольшомъ числѣ экземпляры были разосланы нѣкоторымъ изъ гг. подписчиковъ одновременно съ № 272-ымъ. Въ настоящее время *№ 271 печатается вторично*, и немедленно по выходѣ въ свѣтъ будетъ разосланъ всѣмъ остальнымъ подписчикамъ.

Поправка: — Въ № 272 „Вѣстника“, въ задачѣ № 557, помѣщенной на стр. 219, послѣ 98^2 вмѣсто знака $+$ слѣдуетъ $-$.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса, 28-го Сентября 1899 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.